Algèbre – Interrogation II

*Vous disposez de **45 minutes** pour résoudre les cinq exercices suivants qui sont tous indépendants. Vous pouvez admettre le résultat d'une question pour résoudre une question ultérieure même sans l'avoir traitée. Vous pouvez utiliser librement tous les résultats du cours. Ce qui a été vu uniquement en TD est à redémontrer. En cas de questions ou si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, n'hésitez pas à me solliciter. On prendra soin de rédiger de façon propre et rigoureuse.*

Exercice 1.

1. Rappeler les définitions d'un anneau principal et factoriel.
2. Montrer que l'idéal engendré par X et Y n'est pas principal dans $k[X,Y]$ avec k un corps.
3. Donner un exemple d'anneau principal et un exemple d'anneau factoriel non principal.
4. Montrer que le quotient d'un anneau noethérien est noethérien.

Solution.

1. Je vous renvoie au polycopié de cours pour ces définitions !
2. Soit $I = (X,Y)$. Si I était principal, on aurait $I = (P)$ pour $P \in k[X,Y]$. On aurait alors que $X \in I = (P)$ donc $P \mid X$. Comme X est irréductible, cela signifie que, modulo une constante non nulle, $P = 1$ ou $P = X$. De même $P \mid Y$ et, modulo une constante non nulle, $P = 1$ ou $P = Y$. Enfin, comme X et Y ne sont pas associé (sinon $X = cY$ et évaluer en $Y = 0$ fournit une contradiction), on en déduit que P est inversible et que $I = k[X,Y]$. Or, tout polynôme de I s'annule en $(0,0)$ ce qui n'est pas le cas de tout polynôme de $k[X,Y]$ et on a donc une contradiction !
3. Un anneau principal est donné par $\mathbb{Z}$ ou $k[X]$ avec k corps. Un anneau factoriel non principal est donné par $k[X,Y] = (k[Y])[X]$. Il est factoriel car $k[Y]$ l'est et par théorème de transfert et il n'est pas principal par la question précédente !
4. Soient A un anneau noethérien et I un idéal de A et notons $\pi : A \longrightarrow A/I$ la surjection canonique. Montrons qu'alors A/I est noethérien. Pour ce faire, soit J un idéal de A/I. On sait alors que $\pi^{-1}(J)$ est un idéal de A contenant I. Comme A est noethérien, il existe $a_1, \dots, a_n$ tels que $\pi^{-1}(J) = (a_1, \dots, a_n)$. Autrement dit, tout élément de $\pi^{-1}(J)$ est de la forme
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in A.$$
Comme π est un morphisme d'anneaux et que $J = \pi(\pi^{-1}(J))$ car π est surjective, il s'ensuit que tout élément de J est de la forme
$$\sum_{i=1}^{n} \pi(\lambda_i)\pi(a_i)$$
et $J = (\pi(a_1), \dots, \pi(a_n))$ est engendré par un nombre fini d'éléments si bien que A/I est noethérien !

Exercice 2. Soient A et B deux anneaux commutatifs.

1. Justifier que si I et J sont des idéaux respectivement de A et de B, alors $I \times J$ est un idéal de $A \times B$.
2. Soit K un idéal de $A \times B$. En considérant les deux projections $p_A : A \times B \longrightarrow A$ et $p_B : A \times B \longrightarrow B$ définies par $p_A(a,b) = a$ et $p_B(a,b) = b$ pour tout $(a,b) \in A \times B$, montrer que $K = p_A(K) \times p_B(K)$.
3. Décrire tous les idéaux de $\mathbb{Z}^2$.

Solution.

1. Soient $(i,j), (i',j') \in I \times J$. On a alors
$$(i,j) - (i',j') = (i - i', j - j') \in I \times J$$
car $(I,+)$ et $(J,+)$ sont des groupes abéliens. Il en est donc de même de $(I \times J, +)$. Soient enfin $(a,b) \in A \times B$ et $(i,j) \in I \times J$, alors par définition de la loi produit sur $A \times B$
$$(a,b) \cdot (i,j) = (ai, bj) \in I \times J$$
car I et J sont absorbants ! Ainsi, $I \times J$ l'est et on a bien un idéal !
2. Comme les projections p_A et p_B sont surjectives, on sait que $p_A(K)$ et $p_B(K)$ sont des idéaux de A et B respectivement. Soit alors $k = (a,b) \in K$. On a $a \in p_A(K)$ et $b \in p_B(K)$ de sorte que $k \in p_A(K) \times p_B(K)$. Réciproquement, soient $a \in p_A(K)$ et $b \in p_B(K)$. On a alors qu'il existe $k = (a,b') \in K$ et $k' = (a',b) \in K$. Par ailleurs, comme K est un idéal, $(1,0) \cdot k = (a,0) \in K$ et de même $(0,1) \cdot k' = (0,b) \in K$ et finalement
$$(a,0) + (0,b) = (a,b) \in K.$$
Par double inclusion, on a donc bien $K = p_A(K) \times p_B(K)$.

3. On déduit des questions précédentes que les idéaux de $\mathbb{Z}^2$ sont les $m\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z}$ avec $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.

Exercice 3. Soient $A = C^0([0,1], \mathbb{R})$ et $B = C^1([0,1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions respectivement continues et de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que A est un anneau pour les opérations somme et produit de fonctions et que B est un sous-anneau de A. A-t-on que B est un idéal de A?
2. On pose $I = \{f \in A : f(0) = 0\}$. Préciser si I est un sous-anneau ou un idéal de A.
3. Montrer que I est un idéal maximal de A.
   On pourra considérer un idéal J contenant strictement I et montrer que $J = A$.

Solution.

1. Il est clair que la différence et la multiplication des fonctions conservent le caractère continu et C^1. Par ailleurs, la fonction constante égale à 1 sur $[0,1]$ est continue et C^1 de sorte qu'on obtient bien deux sous-anneaux de l'anneau des fonctions de $[0,1]$ à valeurs réelles.
   En revanche, soit la fonction f constante égale à 1 est dans B. On a alors que fg avec $g(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|$ est égale à g qui est continue mais pas de classe C^1. On a donc pas un idéal.
2. On vérifie immédiatement que la différence de deux fonctions s'annulant en 0 s'annule en 0 et si $f \in I$ et $g \in A$, alors $fg(0) = f(0)g(0) = 0$ car $f(0) = 0$. On a donc bien un idéal. On a en revanche pas un sous-anneau de A puisque la fonction constante égale à 1 (qui est le neutre pour la multiplication) n'est pas dans I.
3. Soit J un idéal de A tel que $I \subseteq J$. Si $J \neq I$, alors il existe $f \in J$, $f \notin I$. Ainsi, $f(0) = 0$. Montrons alors que $J = A$. Comme $J \subseteq A$, il suffit de montrer que $A \subseteq J$. Soit alors $g \in A$. On a

$$h = g - \frac{g(0)}{f(0)} f \in I \subseteq J$$

   puisque cette fonction s'annule en 0 et est continue. On a donc $g = h + \frac{g(0)}{f(0)} f \in J$ et $J = A$, ce qui montre que I est maximal.
   On pouvait aussi considérer le morphisme d'évaluation en 0

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(0). \end{array} \right.$$

   On a que $I = \mathrm{Ker}(f)$ et cette application est surjective (considérer une fonction constante) de sorte qu'au quotient, on obtient $A/I \cong \mathbb{R}$ qui est un corps donc I est maximal!

Exercice 4. Soient A un anneau commutatif et I un idéal de A. On pose

$$\sqrt{I} = \{x \in A : \exists n \in \mathbb{N}^*,\ x^n \in I\}.$$

1. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A.
2. Montrer que si I et J sont deux idéaux de A, alors

$$\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J} \quad \text{et} \quad \sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}.$$

3. Lorsque $A = \mathbb{Z}$ et $I = k\mathbb{Z}$, déterminer $\sqrt{I}$.

Solution.

1. Soient $x, y \in \sqrt{I}$. On a alors deux entiers naturels n et m tels que $x^n, y^m \in I$. Ainsi, puisque l'anneau est commutatif,

$$(x-y)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} (-1)^{n+m-k} x^k y^{n+m-k}.$$

   Si $k \geqslant n$, $x^k = x^n x^{k-n} \in I$ donc $\binom{n+m}{k}(-1)^{n+m-k} x^k y^{n+m-k} \in I$ tandis que si $k < n$, alors $n+m-k \geqslant m$ et $y^{n+m-k} \in I$ de sorte que $\binom{n+m}{k}(-1)^{n+m-k} x^k y^{n+m-k} \in I$. Ainsi, on a bien $(x-y)^{n+m} \in I$ et $x+y \in \sqrt{I}$. Enfin, pour $x \in \sqrt{I}$ tel que $x^n \in I$, comme A est commutatif, pour tout $a \in A$, $(ax)^n = a^n x^n \in I$. On a donc bien que $\sqrt{I}$ est un idéal qui contient clairement I (prendre $n = 1$). On a en particulier $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{\sqrt{I}}$. Soit alors $x \in \sqrt{\sqrt{I}}$. Il existe n tel que $x^n \in \sqrt{I}$ donc il existe m tel que $(x^n)^m = x^{nm} \in I$ et donc $x \in \sqrt{I}$ ce qui démontre que $\sqrt{I} = \sqrt{\sqrt{I}}$.

2. Soit $x \in \sqrt{IJ}$. On a alors l'existence de $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n \in IJ$ soit tel que

$$x^n = \sum_{i=1}^{r} a_i b_i, \quad a_i \in I,\ b_i \in J.$$

On a alors clairement $a_i b_i \in I \cap J$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$ car I et J sont deux idéaux de sorte que $x^n \in I \cap J$ et par conséquent $x \in \sqrt{I \cap J}$. On a donc $\sqrt{IJ} \subseteq \sqrt{I \cap J}$.
Soit alors $x \in \sqrt{I \cap J}$. Il existe alors $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n \in I \cap J$ soit tel que $x^n \in I$ et $x \in \sqrt{I}$ et tel que $x^n \in J$ et $x \in \sqrt{J}$. On a ainsi $x \in \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ et $\sqrt{I \cap J} \subseteq \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.
Enfin, soit $x \in \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$. Alors il existe $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $x^n \in I$ et $x^m \in J$. On a alors $x^{n+m} = x^n x^m \in IJ$ et $\sqrt{I} \cap \sqrt{J} \subseteq \sqrt{IJ}$.
On a donc

$$\sqrt{IJ} \subseteq \sqrt{I \cap J} \subseteq \sqrt{I} \cap \sqrt{J} \subseteq \sqrt{IJ}$$

et donc toutes ces inclusions sont des égalités !

3. Soit $I = k\mathbb{Z}$ avec $k = p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r}$ sa décomposition en produits de facteurs premiers. Si $x \in \sqrt{I}$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $k \mid x^n$. On en déduit alors que tous les facteurs premiers $p_1, \ldots, p_r$ de k divisent x soit que $x \in (p_1 \cdots p_r)\mathbb{Z}$. Réciproquement, il est facile de voir que si $x \in (p_1 \cdots p_r)\mathbb{Z}$, alors $x^n \in I$ avec $n = \max(n_i)$. On a donc $\sqrt{I} = (p_1 \cdots p_r)\mathbb{Z}$ et on appelle l'entier $p_1 \cdots p_r$ le radical de n.

Exercice 5. On pose $\alpha = \sqrt[3]{2}$ et A le sous-anneau de $\mathbb{C}$ engendré par α.

1. Montrer que
$$A = \{P(\alpha)\ :\ P \in \mathbb{Z}[X]\} = \left\{a + b\alpha + c\alpha^2\ :\ a, b, c \in \mathbb{Z}\right\}.$$

2. On admet dans cette question que $A \cong \mathbb{Z}[X]/(X^3 - 2)$ et que cet anneau est factoriel. Préciser si 2 est irréductible ? Et 3 ?

Solution.

1. Par définition de l'anneau engendré, on a immédiatement

$$A = \{P(\alpha)\ :\ P \in \mathbb{Z}[X]\}.$$

Ensuite, on remarque que α annule $X^3 - 2$ unitaire dans $\mathbb{Z}[X]$. On a alors clairement que

$$\left\{a + b\alpha + c\alpha^2\ :\ a, b, c \in \mathbb{Z}\right\} \subseteq A.$$

Réciproquement, soit $z = P(\alpha) \in A$ avec $P \in \mathbb{Z}[X]$. On peut effectuer la division euclidienne de P par $X^3 - 2$ (car ce dernier est unitaire, attention que $\mathbb{Z}[X]$ n'est PAS euclidien) et obtenir $Q, R \in \mathbb{Z}[X]$ avec R de degré au plus 2 tels que $P = (X^3 - 2)Q + R$. On a alors $R(X) = a + bX + cX^2$ et évaluer en α fournit que $z = P(\alpha) = a + b\alpha + c\alpha^2$. On a donc l'égalité souhaitée.

2. On sait que dans un anneau factoriel, un élément x est irréductible si, et seulement si (x) est premier soit si, et seulement si, $A/(X)$ est intègre. Ici, on a

$$A/(2) \cong \left(\mathbb{Z}[X]/(X^3 - 2)\right)/(2) \cong \left(\mathbb{Z}[X]/(2)\right)/(X^3 - 2)$$

en raisonnant comme dans le TD. On a alors $\mathbb{Z}[X]/(2) \cong \mathbb{F}_2[X]$ et $X^3 - 2 = X^3$ modulo 2 si bien que

$$A/(2) \cong \mathbb{F}_2[X]/(X^3)$$

qui n'est pas intègre car X^3 n'est pas irréductible ou car dans le quotient $\overline{X}^3 = 0$ alors que $\overline{X} \neq 0$. On en déduit que 2 n'est pas irréductible.
De même, puisque $X^3 - 2 = X^3 + 1$ modulo 3, on a

$$A/(3) \cong \mathbb{F}_3[X]/(X^3 + 1).$$

Cet anneau est intègre si, et seulement si, $X^3 + 1$ est irréductible modulo 3. Comme il est de degré 3, cela est équivalent à ce qu'il soit sans racine. Or on vérifie que -1 est racine et donc le polynôme n'est pas irréductible et 3 n'est pas non plus irréductible ! On pourrait montrer en revanche que 5 est irréductible !